OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1903. N° 1

ÉGALITÉ PAR ADDITION DE QUELQUES POLYÈDRES

PAR

C. JUEL

(COMMUNICATION FAITE DANS LA SÉANCE DU 12 DÉCEMBRE 1902)

On doit aux recherches de MM. DEHN et VAHLEN[1] la démonstration exacte d'une condition nécessaire pour que deux polyèdres donnés soient composés d'autres polyèdres égaux entre eux par paires; nous les appellerons: égaux par addition.

Cette condition est exprimée par la congruence

$$\Sigma\mu v \equiv \Sigma\mu' v_1 \pmod{\pi}, \tag{A}$$

où v et v_1 sont des angles dièdres respectivement dans l'un ou dans l'autre polyèdre; et μ et μ', des entiers positifs.

Dans ce qui suit nous allons considérer des exemples de polyèdres qui sont égaux par addition à un cube.

Des recherches ci-dessus mentionnées il ne résulte pas qu'il existe des polyèdres non prismatiques égaux à un cube ni que la condition (1) soit suffisante pour que deux polyèdres égaux soient égaux par addition.

Quelques exemples suffiront pour montrer ce qui en est.

1. *Deux polyèdres égaux par addition à un même troisième sont égaux entre eux par addition.*

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème analogue relatif aux aires planes.

2. *Un prisme quelconque est égal par addition à un cube.*

[1] Voir Math. Annalen t. 55, p. 465 et t. 56, p. 507.

Si nous considérons un prisme droit, on pourra toujours transformer celui-ci en un parallélépipède droit de même hauteur en changeant la base G en un rectangle égal par addition à G.

On pourra en outre faire en sorte que l'un des côtés du rectangle ait la longueur $\sqrt[3]{G}$.

En répétant le procédé on pourra donner la longueur $\sqrt[3]{G}$ à une autre arête du parallélépipède.

La troisième arête aura alors la même longueur, et nous aurons construit un cube qui est égal par addition à notre prisme.

Dans le cas où le prisme donné n'est pas droit, il faudra le changer en un prisme droit ou en une somme de prismes droits.

S'il existe une section droite N qui ne coupe pas les bases G_1 et G_2 du prisme, celui-ci sera partagé par N en deux prismes droits tronqués qu'on pourra réunir de manière à en faire un prisme droit.

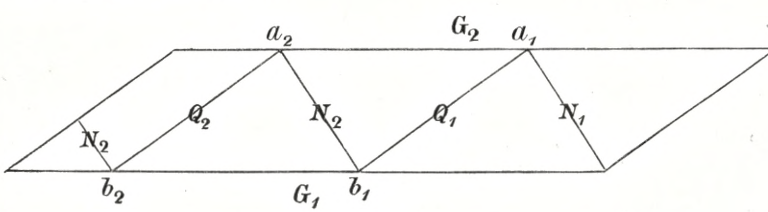

Fig. 1.

Au cas où le procédé précédent ne serait pas applicable, on pourra toujours trouver une section droite N_1 qui ne coupe pas G_1, mais qui ait un segment a_1 en commun avec G_2. Par a_1 nous menons, parallèlement aux arêtes latérales du prisme, un plan Q_1 qui a un segment b_1 en commun avec G_1. Ensuite nous menons par b_1 une section droite N_2 ayant un segment a_2 en commun avec G_2; par a_2 un plan Q_2 parallèle aux arêtes latérales, etc., jusqu'à ce que nous obtenions une section droite qui ne coupe pas G_2. Le prisme donné est alors divisé par les plans $Q_1, Q_2 \ldots.$ en des prismes auxquels on pourra appliquer le premier des procédés ci-dessus employés; il est donc égal par addition à une somme de prismes droits que l'on pourra réunir enfin en un prisme simple.

3. *Une pyramide quadrangulaire régulière, dont les surfaces latérales font un angle u de 45° avec la base, est égale par addition à un cube.*

L'angle dièdre v compris entre deux surfaces latéralés consécutives sera alors de 120°.

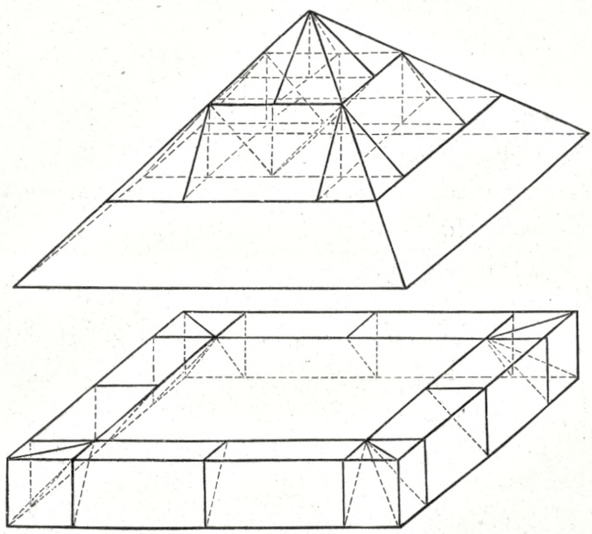

Fig. 2.

On a donc:

$$4u + 3v = 540°$$

conformément à la condition (A).

Pour démontrer notre proposition nous partagerons la pyramide, à l'aide de deux plans parallèles à la base, en une pyramide et deux troncs de pyramide ayant tous les trois la même hauteur.

Partageons la petite pyramide en quatre pyramides à base quadrangulaire. (Voir la fig. 2.)

Partageons le tronc de pyramide situé au milieu, à l'aide de plans parallèles à la hauteur et menés par les arêtes de la base supérieure, en un prisme quadrangulaire régulier, quatre prismes triangulaires droits et quatre pyramides égales à celles ci-dessus mentionnées.

Partageons enfin le prisme quadrangulaire susdit en quatre prismes triangulaires égaux aux premiers.

Nous avons donc 17 morceaux que nous pourrons facilement réunir en un parallélépipède rectangle. (Voir la fig. 2.)

D'après (1) la pyramide est donc égale par addition à un cube.

4. *Un tronc de pyramide régulier, dont l'angle dièdre v compris entre une surface latérale et la base, est commensurable à π, tandis que l'angle dièdre u compris entre deux surfaces latérales consécutives est incommensurable à π, ne sera jamais égal par addition à un cube.*

Qu'il existe des pyramides assujetties à ces conditions, c'est ce qu'on voit par la relation:

$$\cos\frac{u}{2} = \sin v \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

où nous avons supposé que la base a n côtés. Prenons par exemple $n = 3$, $v = 45°$, d'où $\cos\frac{u}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\cos u = -\frac{1}{4}$.

Pour le tronc de pyramide en question on a une relation de la forme (A), car si on appelle w l'angle dièdre compris entre les bases et une surface latérale, on aura:

$$\Sigma w + \mu v = k\frac{\pi}{2},$$

puisque

$$\Sigma w = n\pi.$$

Soient $A_1, A_2 \ldots A_n$ les sommets de la base supérieure du tronc, et soient $B_1, B_2 \ldots B_n$ les sommets de la base inférieure.

Des points $A_1, A_2 \ldots A_n$, nous abaissons les perpendiculaires A_1C_1, $A_2C_2 \ldots A_nC_n$ sur la base inférieure. Par A_1C_1 nous menons deux plans perpendiculaires aux arêtes A_1A_2 et A_1A_n;

et par $A_2 C_2 \ldots A_n C_n$ nous menons des plans déterminés d'une manière analogue. Le tronc se trouve ainsi partagé en $2n+1$ morceaux, savoir: un prisme régulier avec une base à n côtés, n prismes triangulaires dont les arêtes latérales sont $A_1 A_2$, $A_2 A_3 \ldots A_n A_1$ et n pyramides quadrangulaires dont les sommets sont $A_1 A_2 \ldots A_n$. (Voir la fig. 3). Ces pyramides peuvent être réunies en une pyramide $O - D_1 D_2 D_3 \ldots$. semblable à celle qu'il faudra ajouter au tronc donné pour former une

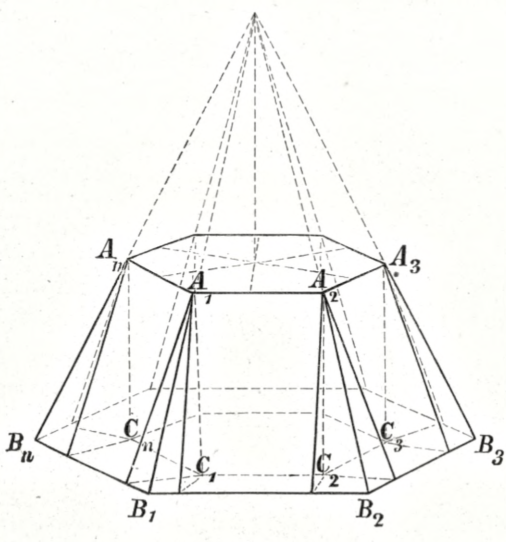

Fig. 3.

pyramide. La longueur de côté de la base de cette pyramide est $B_1 B_2 - A_1 A_2$.

Or la somme des n prismes triangulaires peut être rendue égale par addition à un prisme régulier dont la base est $D_1 D_2 \ldots D_n$. Tel est encore le cas pour le prisme $A_1 A_2 \ldots A_n - C_1 C_2 \ldots C_n$. On pourra en outre réunir les deux prismes que nous venons de construire en un prisme de même base.

Nous pouvons maintenant construire un polyèdre égal par addition au tronc donné, et qui sera composé d'un prisme régulier et d'une pyramide dont la base coïncide avec celle du prisme.

Une condition nécessaire pour que ce polyèdre soit égal à un cube, est, d'après (A), que

$$\mu_1\left(v+\frac{\pi}{2}\right)+\nu_1\cdot u = k\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Or cette relation ne peut pas être satisfaite puisque nous avons supposé v commensurable et u incommensurable à π.

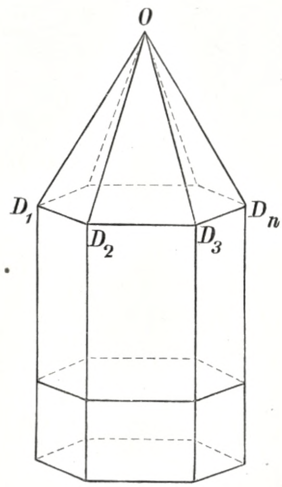

Fig. 4.

Le tronc donné ne pourra donc pas non plus être égal par addition à un cube.

L'exemple ci-dessus donné de l'insuffisance de la relation (A) est d'un caractère assez général.

Un exemple plus simple encore s'obtient en considérant un des prismes tronqués qu'il faut adjoindre à un cube pour former un dodécaèdre régulier (construction d'Euclide).

Dans le théorème (4) ni la pyramide, ni le tronc de la pyramide n'étaient égaux par addition à un cube.

Nous allons maintenant démontrer que

5. *Si une pyramide est égale par addition à un cube, le cas sera encore le même pour tout tronc obtenu en coupant la pyramide donnée par un plan parallèle à sa base.*

Ce théorème ne suppose pas que la pyramide soit régulière.

Soient $A_1 A_2 A_3 \ldots.$ la base supérieure, et $B_1 B_2 B_3 \ldots.$ la base inférieure du tronc. Par un point quelconque de la base

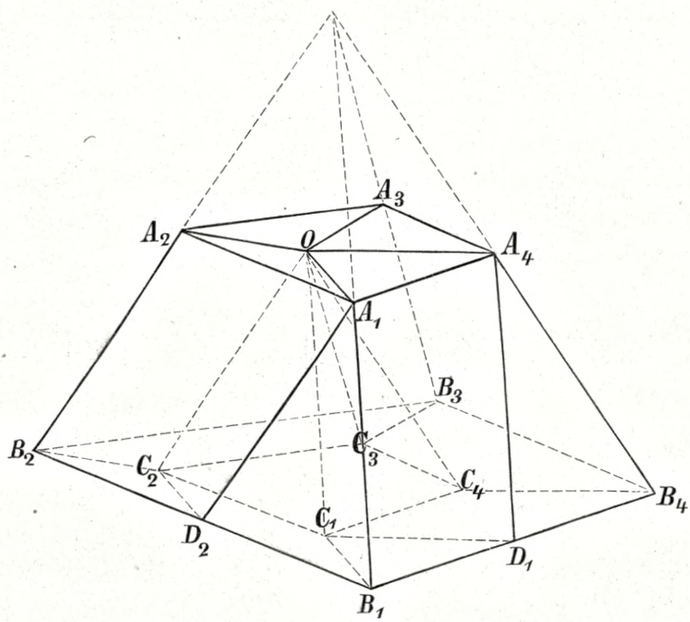

Fig. 5.

supérieure nous menons parallèlement aux arêtes latérales des droites qui coupent la base inférieure en $C_1 C_2 C_3 \ldots$ Par C_2 nous menons parallèlement à OA_1 une droite qui coupe $B_1 B_2$ en D_2. Partageons ensuite le polyèdre $A_1 O A_2 — B_1 C_1 C_2 B_2$ par le plan $OC_2 D_2 A_1$ en deux prismes: $OA_1 A_2 — C_2 D_2 B_2$ et $OC_1 C_2 — A_1 B_1 D_2$.

Si nous enlevons enfin ces deux prismes et tous les autres prismes analogues, reste une pyramide $O — C_1 C_2 C_3 \ldots$ semblable à la pyramide donnée et, par conséquent, comme celle-ci, égale par addition à un cube.

Il est facile de donner aux théorèmes (4) et (5) une portée plus étendue en remplaçant en (4) la pyramide régulière par certaines pyramides non régulières et en substituant en (5) au tronc de pyramide les polyèdres qu'on appelle prismatoïdes.